Distribuições discretas

Distribuição de Bernoulli

- ***Distribuição de Bernoulli***:
  - ***Def***: Distribuição de probabilidades duma *v. a.* que nos dá o ***nº de sucessos numa tentativa***.
  - ***Validade***:
    - Em cada repetição da experiência ocorre apenas um de ***dois resultados possíveis***: ***sucesso ou insucesso***.
    - A probabilidade de sucesso, ***p***, é a ***mesma em cada repetição***.
    - Os ***resultados*** de diferentes repetições são ***independentes***.

- *Def*: Se X é uma *v.a.* de ***Bernoulli*** de ***parâmetro p***, então escreve-se:

$$X \sim \text{Bernoulli}(p)$$

Distribuição de Bernoulli

- *Teor*: Se $X \sim$ Bernoulli(p), então a sua ***função de probabilidade*** é:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \notin \{0,1\} \\ p^x (1-p)^{1-x} & , x \in \{0,1\} \end{cases}$$

- *Teor*: Se $X \sim$ Bernoulli(p), então a sua ***média*** é dada por

$$E(X) = p$$

- *Teor*: Se $X \sim$ Bernoulli(p), então a sua ***variância*** é dada por

$$V(X) = p(1-p)$$

- ***Distribuição binomial***:
  - ***Def***: Distribuição de probabilidades duma *v. a.* que nos dá o ***nº de sucessos em n tentativas***.

    <u>*Nota*</u>: É uma generalização da distribuição de Bernoulli. De facto, se

    X_i : "Nº de sucessos na i-ésima tentativa", $i = 1, 2, \ldots, n$

    X : "Nº de sucessos em n tentativas"

    Então: $$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$
  - ***Validade***:
    - Condições da distribuição de Bernoulli.

- *Exercício*: Quais das seguintes definições podem ser *v. a.* binomiais?

  a) X: "Latas cheias num lote de 6"

  b) X: "Número de veículos avariados em 20"

  c) X: "Duração de uma lâmpada de certo modelo, em horas"

  d) X: "Número de chamadas atendidas em 8 recebidas"

Distribuição binomial

- *Def*: Se X é uma *v.a.* ***binomial*** de ***parâmetros n*** e ***p***, então escreve-se:

$$X \sim \mathrm{Bi}(n, p)$$

- *Teor*: Se $X \sim \mathrm{Bi}(n, p)$, então a sua ***função de probabilidade*** é:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \notin \{0,1,2,\ldots,n\} \\ C_x^n p^x q^{n-x} & , x \in \{0,1,2,\ldots,n\} \end{cases}$$

onde $q = 1 - p$

Distribuição binomial

- *Teor*: Se $X \sim \text{Bi}(n, p)$, então a sua ***média*** é dada por

$$E(X) = np$$

- *Teor*: Se $X \sim \text{Bi}(n, p)$, então a sua ***variância*** é dada por

$$V(X) = npq$$

Exercício

Numa dada localidade, 25% das crianças têm excesso de peso. Para 12 crianças destas escolhidas ao acaso, determine:

a) A probabilidade de apenas 2 terem excesso de peso.

X:"Número de crianças com excesso de peso, em 12"

$$X \sim \text{Bi}(n,p) \text{ com } \begin{cases} n = 12 \\ p = 0.25 \end{cases}$$

Porque:

i) Para cada criança, só há 2 resultados possíveis: ou tem excesso de peso ou não.

ii) Para cada criança escolhida, a probabilidade de ter excesso de peso mantém-se.

iii) Os resultados para diferentes crianças são independentes.

$$P(X = 2) = 0.2323$$

$dbinom(2, 12, 0.25)$

$R: P(X = x) = dbinom(x, n, p)$

Exercício

b) A probabilidade de pelo menos 5 terem excesso de peso.

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - P(X \leq 4) = 0.1576$$

$R: P(X \leq x) = pbinom(x, n, p)$

$1 - pbinom(4, 12, 0.25)$

c) O número esperado de crianças com excesso de peso.

$$E(X) = np = 12 \times 0.25 = 3$$

Distribuição de Poisson

- ***Distribuição de Poisson:***
  - ***Def***: Distribuição de probabilidades duma *v. a.* que nos dá o ***nº de eventos ocorridos num dado intervalo*** (temporal ou espacial).

- *Exercício*: Quais das seguintes definições podem ser *v. a.* de Poisson?

  a) X: "Latas cheias numa hora"

  b) X: "Número de clientes que entram numa loja em duas horas"

  c) X: "Duração de uma lâmpada de certo modelo, em horas"

  d) X: "Número de chamadas atendidas em 10 minutos"

Distribuição de Poisson

- *Def*: Seja X é uma *v.a.* de ***Poisson de parâmetro μ***, então escreve-se:

$$X \sim \mathrm{Po}(\mu)$$

- *Teor*: Se $X \sim \mathrm{Po}(\mu)$, então a sua ***função de probabilidade*** é:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \notin \mathbb{N}_0 \\ \dfrac{\mu^x}{x!} e^{-\mu} & , x \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Distribuição de Poisson

- *Teor*: Se $X \sim \text{Po}(\mu)$, então a sua ***média*** é dada por

$$E\left(X\right) = \mu$$

- *Teor*: Se $X \sim \text{Po}(\mu)$, então a sua ***variância*** é dada por

$$V\left(X\right) = \mu$$

Exercício

Numa certa tempestade, o número de raios gerados em cada minuto segue uma distribuição de Poisson, de média 2.3. Determine:

a) A probabilidade de ocorrerem 3 raios num período de um minuto.

X:"Número de raios num minuto"

$X \sim \mathrm{Po}(\mu), \quad \mu = 2.3$

$P(X = 3) = 0.2033$

$dpois(3, 2.3)$

$R: P(X = x) = dpois(x, \mu)$

b) A probabilidade de ocorrerem menos de 5 raios num período de um minuto.

$P(X < 5) = P(X \leq 4) = 0.9162$

$ppois(4, 2.3)$

$R: P(X \leq x) = ppois(x, \mu)$