

Distribuições discretas

Distribuição de Bernoulli

- *Distribuição de Bernoulli:*
 - **Def:** Distribuição de probabilidades duma v. a. que nos dá o *nº de sucessos numa tentativa*.
 - **Validade:**
 - Em cada repetição da experiência ocorre apenas um de *dois resultados possíveis: sucesso ou insucesso*.
 - A probabilidade de sucesso, p , é a *mesma em cada repetição*.
 - Os *resultados* de diferentes repetições são *independentes*.
- **Def:** Se X é uma v.a. de *Bernoulli* de *parâmetro* p , então escreve-se:

$$X \sim \text{Bernoulli}(p)$$

Distribuição de Bernoulli

- *Teor:* Se $X \sim \text{Bernoulli}(p)$, então a sua *função de probabilidade* é:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \notin \{0,1\} \\ p^x(1-p)^{1-x} & , x \in \{0,1\} \end{cases}$$

- *Teor:* Se $X \sim \text{Bernoulli}(p)$, então a sua *média* é dada por

$$E(X) = p$$

- *Teor:* Se $X \sim \text{Bernoulli}(p)$, então a sua *variância* é dada por

$$V(X) = p(1-p)$$

Distribuição binomial

- **Distribuição binomial:**
 - **Def:** Distribuição de probabilidades duma v. a. que nos dá o ***nº de sucessos em n tentativas***.
Nota: É uma generalização da distribuição de Bernoulli. De facto, se
 - X_i : “Nº de sucessos na i -ésima tentativa”, $i = 1, 2, \dots, n$
 - X : “Nº de sucessos em n tentativas”Então:
$$X = \sum_{i=1}^n X_i$$
- **Validade:**
 - Condições da distribuição de Bernoulli.
- **Exercício:** Quais das seguintes definições podem ser v. a. binomiais?
 - a) X : “Latas cheias num lote de 6”
 - b) X : “Número de veículos avariados em 20”
 - c) X : “Duração de uma lâmpada de certo modelo, em horas”
 - d) X : “Número de chamadas atendidas em 8 recebidas”

Distribuição binomial

- *Def:* Se X é uma v.a. **binomial** de *parâmetros* n e p , então escreve-se:

$$X \sim \text{Bi}(n, p)$$

- *Teor:* Se $X \sim \text{Bi}(n, p)$, então a sua **função de probabilidade** é:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \notin \{0,1,2,\dots,n\} \\ C_x^n p^x q^{n-x} & , x \in \{0,1,2,\dots,n\} \end{cases}$$

onde $q = 1 - p$

Distribuição binomial

- *Teor:* Se $X \sim \text{Bi}(n, p)$, então a sua **média** é dada por

$$E(X) = np$$

- *Teor:* Se $X \sim \text{Bi}(n, p)$, então a sua **variância** é dada por

$$V(X) = npq$$

Exercício

Numa dada localidade, 25% das crianças têm excesso de peso. Para 12 crianças destas escolhidas ao acaso, determine:

- a) A probabilidade de apenas 2 terem excesso de peso.

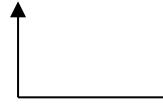
X : "Número de crianças com excesso de peso, em 12"

$$X \sim \text{Bi}(n, p) \text{ com } \begin{cases} n = 12 \\ p = 0.25 \end{cases}$$

Porque:

- i) Para cada criança, só há 2 resultados possíveis: ou tem excesso de peso ou não.
- ii) Para cada criança escolhida, a probabilidade de ter excesso de peso mantém-se.
- iii) Os resultados para diferentes crianças são independentes.

$$P(X = 2) = 0.2323$$



$$\text{dbinom}(2, 12, 0.25)$$

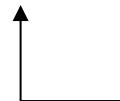
$$R: P(X = x) = \text{dbinom}(x, n, p)$$

Exercício

b) A probabilidade de pelo menos 5 terem excesso de peso.

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - P(X \leq 4) = 0.1576$$

R: $P(X \leq x) = pbinom(x, n, p)$



$1 - pbinom(4, 12, 0.25)$

c) O número esperado de crianças com excesso de peso.

$$E(X) = np = 12 \times 0.25 = 3$$

Distribuição de Poisson

- ***Distribuição de Poisson:***
 - ***Def:*** Distribuição de probabilidades duma v. a. que nos dá o ***nº de eventos ocorridos num dado intervalo*** (temporal ou espacial).
- ***Exercício:*** Quais das seguintes definições podem ser v. a. de Poisson?
 - a) X : “Latas cheias numa hora”
 - b) X : “Número de clientes que entram numa loja em duas horas”
 - c) X : “Duração de uma lâmpada de certo modelo, em horas”
 - d) X : “Número de chamadas atendidas em 10 minutos”

Distribuição de Poisson

- *Def:* Seja X é uma v.a. de **Poisson de parâmetro μ** , então escreve-se:

$$X \sim \text{Po}(\mu)$$

- *Teor:* Se $X \sim \text{Po}(\mu)$, então a sua **função de probabilidade** é:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \notin \mathbb{N}_0 \\ \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu} & , x \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Distribuição de Poisson

- *Teor:* Se $X \sim \text{Po}(\mu)$, então a sua **média** é dada por

$$E(X) = \mu$$

- *Teor:* Se $X \sim \text{Po}(\mu)$, então a sua **variância** é dada por

$$V(X) = \mu$$

Exercício

Numa certa tempestade, o número de raios gerados em cada minuto segue uma distribuição de Poisson, de média 2.3. Determine:

- a) A probabilidade de ocorrerem 3 raios num período de um minuto.

X : "Número de raios num minuto"

$$X \sim \text{Po}(\mu), \quad \mu = 2.3$$

$$P(X = 3) = 0.2033$$

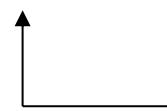


$dpois(3, 2.3)$

$R: P(X = x) = dpois(x, \mu)$

- b) A probabilidade de ocorrerem menos de 5 raios num período de um minuto.

$$P(X < 5) = P(X \leq 4) = 0.9162$$



$ppois(4, 2.3)$

$R: P(X \leq x) = ppois(x, \mu)$